# Nachklausur Lineare Algebra I
WS 14/15

22.7.2015

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie
$$\{\{1,\{2\}\},3,\{4\}\} \cap \big(\{1,2,3,4\} \cup \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}\big).$$

**Aufgabe 2.** Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wird eine Relation definiert durch $(x,y) \sim (u,v) \Leftrightarrow xv = uy$. Zeigen Sie, dass dies Relation eine Äquivalenzrelation ist. Sei $[(x,y)]$ die Äquivalenzklasse von $(x,y)$ bezüglich dieser Relation. Lässt sich durch $[(x,y)] + [(u,v)] = [(x+u, y+v)]$ eine Addition auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim$ definieren?

**Aufgabe 3.** Sei $V$ ein Vektorraum, $U_1, U_2, W$ Unterräume mit $\langle U_1, W\rangle = \langle U_2, W\rangle$. Es gilt $\dim W = 6, \dim U_1 = 3$. Welche Werte kann $\dim U_2$ annehmen?

**Aufgabe 4.** Sei $V$ ein Vektorraum, $U, W$ Unterräume von $V$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : U \oplus W \to V$, die gegeben ist durch $\phi((u,w)) = u + w$ linear ist, und berechnen Sie Bild und Kern dieser Abbildung.

**Aufgabe 5.** Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $k$ der Charakteristik $\neq 2$, $\imath : V \to V$ die Identität. Eine lineare Abbildung $\phi : V \to V$ heißt Projektion, falls $\phi \circ \phi = \phi$, sie heißt Involution, falls $\phi \circ \phi = \imath$. Sei $P$ die Menge der Projektionen, $I$ die Menge der Involutionen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi \mapsto 2\pi - \imath$ eine surjektive Abbildung von $P$ nach $I$ definiert.

**Aufgabe 6.** Eine Zisterne wird aus drei Quellen gespeist. Die erste und zweite Quelle zusammen füllen das Becken in 8 Stunden, die zweite und dritte zusammen in 16 Stunden. Die dritte Quelle liefert halb so viel Wasser wie die zweite. In welcher Zeit füllen alle drei Quellen zusammen das Becken?

**Aufgabe 7.** Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ für alle natürlichen Zahlen $n$.

**Aufgabe 8.** Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix und $k < n$ eine natürliche Zahl. Angenommen $a_{ij} = 0$ für alle $i, j$ mit $i \leq n-k$ und $j \leq k$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{1\,k+1} & a_{1\,k+2} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,k+1} & a_{2\,k+2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k\,k+1} & a_{n-k\,k+2} & \cdots & a_{n-k\,n} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{n-k+1\,1} & a_{n-k+1\,2} & \cdots & a_{n-k+1\,k} \\ a_{n-k+2\,1} & a_{n-k+2\,2} & \cdots & a_{n-k+2\,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,k} \end{pmatrix}.$$