Klausur Lineare Algebra I/II und Lineare Algebra II
23.2.2016

1. Nur für Lehramt

Aufgabe 1. Sei $X = \{0, \{1\}, 2, \{3, \{4\}\}\}$. Bestimmen Sie die Potenzmenge von $X \cap \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung, so dass es drei Ebenen E_1, E_2, E_3 und eine Gerade g gibt, die alle den Nullpunkt enthalten, so dass φ die Ebene E_1 surjektiv auf E_2 und E_3 surjektiv auf g abbildet. Zeigen Sie, dass φ den Rang 2 hat.

Aufgabe 4. Für einen Kredit mit konstantem Zinssatz sind am Ende des ersten Jahres 700€ Zinsen und 2000€ Tilgung zu bezahlen. Am Ende des zweiten Jahres betragen die Zinsen nur noch 630€. Wie hoch sind Zinssatz und Kreditsumme?

2. Lehramt und Bachelor

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 6. Welche der folgenden Aussagen stimmen, welche nicht?

(1) Hat eine reelle Matrix A einen einzigen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so gilt $A = \lambda E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.
(2) Hat eine reelle Matrix einen komplexen Eigenwert, so ist sie über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar.
(3) Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn alle Eigenwerte verschieden sind.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie alle Paare von Vektoren u und v, für die $u + v$ und $u - v$ senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 8. Ein regelmäßiger Tetraeder (d.h. alle Kanten gleich lang, alle Winkel $60°$) hat die Ecken A, B, C, D. Sei S der Schwerpunkt des Tetraeders, also $S = \frac{1}{4}(A + B + C + D)$. Wie groß sind die Winkel im Dreieck ABS? Es genügt, wenn Sie für einen der drei Innenwinkel den Cosinus angeben.

3. Nur Bachelor

Aufgabe 9. Sei A eine 5×5-matrix mit Minimalpolynom $(x-2)^2(x-1)^2$. Geben Sie alle möglichen Jordanformen von A an.

Aufgabe 10. Sei V der Vektorraum der Polynome über einem Körper. Finden Sie zwei unendlich dimensionale Unterräume U, W, so dass $V = U \oplus W$ gilt, für die Sie Basen explizit angeben können.

Aufgabe 11. Gegeben ist eine $n \times n$-Matrix, deren Einträge Zahlenpaare (u, v) mit $1 \leq u, v, \leq n$ ganz sind. Angenommen, in jeder Zeile und jeder Spalte kommt jede Zahl von 1 bis n genau einmal an der ersten Stelle eines Paares und genau einmal an der zweiten Stelle vor. Außerdem soll jedes Zahlenpaar genau einmal in der Matrix auftauchen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{(i, j, u, v) | (u, v) \text{ steht an der Stelle (i,j)}\}$ einen Code über $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit Minimalabstand 3 bildet.

Aufgabe 12. Sei p ein Primteiler von $2^{2^n} + 1$. Zeigen Sie, dass $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ gilt.