

Blatt 1

Abgabe: 10.04.2013

KONTROLLFRAGEN

- (K1) Wozu brauchen wir *Statistische Physik*, wenn wir doch schon Theorien haben, welche Materie auf mikroskopischer Ebene beschreiben?
- (K2) Was versteht man unter *Mikrozuständen*, was unter *Makrozuständen*?
- (K3) Was besagt der *Zentrale Grenzwertsatz*? Welche Voraussetzungen gehen bei dessen Herleitung ein? Inwiefern bereitet er die Basis einer *Gleichgewichtsthermodynamik*?
- (K4) Was versteht man in der Quantenstatistik unter einem *reinen Zustand*, was unter einem *Gemisch*?

AUFGABEN

(1.1) SCHWANKUNGSQUADRAT 10 Punkte

In der Vorlesung wurde das Schwankungsquadrat $(\Delta x)^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ definiert. Zeigen Sie, dass auch $(\Delta x)^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle$ gilt.

(1.2) GAUSS-VERTEILUNG 10 Punkte

Zeigen Sie, dass mit der aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgenden Gauß-Verteilungsfunktion

$$w_F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\Delta x)^2}} \exp\left(-\frac{(f - N\langle X \rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}\right)$$

für den Erwartungswert $\langle F \rangle = N\langle X \rangle$ folgt und für die Schwankungsbreite $\Delta f = \Delta x \sqrt{N}$.

(1.3) RANDOM WALK 20 Punkte

Ein Teilchen (oder Mensch) bewege sich während eines Zeitschritts mit gleicher Wahrscheinlichkeit um eine Einheitsdistanz nach links oder rechts.

- (i) In der Notation der Vorlesung: Was entspricht in diesem Problem X , x und $w(x)$?
- (ii) Berechnen Sie für die nach N Zeitschritten zurückgelegte Distanz beschreibende Zufallsvariable $F(X_1, X_2, \dots, X_N)$ den Erwartungswert $\langle F \rangle$, das zweite Moment $\langle F^2 \rangle$ und die Schwankungsbreite Δf exakt.
- (iii) Was sagt der Zentrale Grenzwertsatz für diese Größen voraus?

(bitte wenden)

(1.4) PHASENRAUMTRAJEKTORIEN UND -VOLUMEN

20 Punkte

Zeichnen Sie die Phasenraumtrajektorie $(q(t), p(t))$ für ein Teilchen der Masse $m = 1$ und Energie $E = p^2/2$ in einem eindimensionalen, unendlich hohen Kastenpotential der Breite L . Betrachten Sie die Phasentrajektorien dreier im Phasenraum benachbarter Teilchen und überzeugen Sie sich davon, dass das von diesem Ensemble eingeschlossene Phasenraumvolumen zeitlich konstant bleibt.

(1.5) NICHT-IDEMPOTENZ BEI GEMISCHEN

20 Punkte

Zeigen Sie, dass für Gemische der statistische Operator $\hat{\rho}$ (auch Dichteoperator oder Dichtematrix genannt) $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$ und $\text{Sp } \hat{\rho}^2 < 1$ erfüllt.

(1.6) AUSSPUREN

20 Punkte

Zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen seien in einem verschränkten Zustand präpariert:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle),$$

wobei z.B. $|+-\rangle$ bedeute, dass Teilchen 1 im Zustand $m_s = +1/2$ sei und Teilchen 2 im Zustand $m_s = -1/2$.

- (i) Schreiben Sie den Dichteoperator $\hat{\rho}$ auf. Berechnen Sie anschließend durch Spurbildung $\text{Sp}(\hat{P}\hat{\rho})$ mit dem Projektionsoperator $\hat{P} = |++\rangle\langle++|$ die Wahrscheinlichkeit, beide Teilchen im Zustand $|+\rangle$ zu messen.
- (ii) Nun werde Teilchen 2 ignoriert. Berechnen Sie zunächst den Dichteoperator für Teilchen 1 durch *Ausspuren*, $\hat{\rho}_1 = \text{Sp}_2 \hat{\rho}$, und anschließend durch Spurbildung $\text{Sp}_1(\hat{P}_1\hat{\rho}_1)$ mit dem Projektionsoperator $\hat{P}_1 = |+\rangle\langle+|$ die Wahrscheinlichkeit, Teilchen 1 im Zustand $|+\rangle$ zu messen.